Correction DM TES du 10 octobre 2009

f est la fonction définie sur **R** - {3} par $f(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$ et de courbe C.

1. C passe par A(2 ;1) c'est-à-dire $f(2) = 1$

Et admet en ce point une tangente horizontale, c'est-à-dire $f^{'}(2) = 0$

$f(2) = a\times 2 + b + \frac{1}{3-2} = 2a + b + 1$. On a $2a + b + 1 = 1$ i.e. $\boxed{2a + b = 0}$

D'autre part, $f'(x) = a + \frac{+1}{(3-x)^2}$ car $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ avec $\begin{matrix} v(x) = 3 - x \\ v^{'}(x) = -1 \end{matrix}$

$f^{'}(2) = a + \frac{1}{(3-2)^2} = a + 1$. On a $\boxed{a + 1 = 0}$ c'est-à-dire $\boxed{a = -1.}$

On a aussi $\boxed{2a + b = 0}$ $2\times(-1) + b = 0$ i.e. $-2 + b = 0$ soit $b = 2$.

$$\boxed{\text{On a donc } f(x) = -x + 2 + \frac{1}{3-x}}$$

2. a) $f(x) - (-x + 2) = -x + 2 + \frac{1}{3-x} + x - 2 = \frac{1}{3-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(3 - x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3-x} = 0$ C'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (-x + 2) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(3 - x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3-x} = 0$ C'est-à-dire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-x + 2) = 0$

Donc la droite $\Delta: y = -x + 2$ est asymptote à C aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

b) On a vu que $f(x) - (-x + 2) = \frac{1}{3-x}$. $3 - x \geq 0$ $équivaut$ à $3 \geq x$ i.e. $x \leq 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Signe de $f(x) - (-x + 2)$	+	||	-

Sur $]-\infty; 3[, C\ est\ au-dessus\ de\ \Delta$. Sur $]3; +\infty[, C\ est\ en\ dessous\ de\ \Delta$.

3.

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}(3 - x) = 0^+$ d'après le tableau de signe ci-dessus donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}\frac{1}{3-x} = +\infty$ De plus,

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}(-x + 2) = -1$ Donc par addition, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}(3 - x) = 0^-$ d'après le tableau de signe ci-dessus donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}\frac{1}{3-x} = -\infty$ De plus,

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}(-x + 2) = -1$ Donc par addition, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = -\infty}$

4. $f^{'}(x) = a + \frac{+1}{(3-x)^2} = -1 + \frac{+1}{(3-x)^2} = \frac{-1(3-x)^2}{(3-x)^2} + \frac{1}{(3-x)^2} = \frac{-(9-6x+x^2)+1}{(3-x)^2} = \frac{-9+6x-x^2+1}{(3-x)^2} = \frac{-x^2+6x-8}{(3-x)^2}$

Comme $(3-x)^2>0$ sur l'ensemble de définition, f'(x) est du signe de $-x^2 + 6x - 8$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = 36 - 32 = 4$ et $\sqrt{\Delta} = 2$ donc deux racines

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-2}{2\times(-1)} = \frac{-8}{-2} = 4$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+2}{2\times(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$.

$-x^2 + 6x - 8$ est du signe de a=-1<0 à l'extérieur des racines

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
Signe de f'(x)		-	0	+	||	+	0	-	
Variations de f	$+\infty$	↘	1	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	-3	↘	$-\infty$

Comme Δ est asymptote à C en $+\infty$ et $-\infty$, $f(x)$ et $-x+2$ ont les mêmes limites en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x+2) = +\infty \ et \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-x+2) = -\infty$$

$$f(2) = -2+2+\frac{1}{3-2} = 0+1 = 1\ ;\ f(4) = -4+2+\frac{1}{3-4} = -2+(-1) = -3$$