

## L'INVASION DES UNS (FICHE PROFESSEUR)

Parmi les nombres entiers de l'intervalle  $[0 ; 11\ 111\ 111\ 111]$ , combien contiennent la séquence « 111 » dans leur écriture décimale ?

$\Pi_n$  : L'ensemble des nombres à  $n$  chiffres ou moins.

$U_n$  : L'ensemble des nombres de  $\Pi_n$  qui contiennent la séquence 111.

$V_n$  : L'ensemble des nombres de  $\Pi_n$  qui se terminent par 11, mais qui ne contiennent pas 111.

$W_n$  : L'ensemble des nombres de  $\Pi_n$  qui se terminent par 1, mais pas par 11 et qui ne contiennent pas 111.

$X_n$  : L'ensemble des nombres de  $\Pi_n$ .

$u_n$  : Le nombre de nombres dans  $U_n$ .

$v_n$  : Le nombre de nombres de  $V_n$ .

$w_n$  : Le nombre de nombres de  $W_n$ .

$x_n$  : Le nombre de nombres de  $X_n$ .

*Les notations sont un peu lourdes, on peut peut-être les définir oralement.*

1. Compléter le tableau :

n	$u_n$	$v_n$	$w_n$	$x_n$
1	0	0	1	9
2	0	1	9	90
3	1	9	90	900
4	19	90	900	8 991
5	280	900	8 991	89 829

2. Trouver une relation liant  $u_{n+1}$ ,  $v_{n+1}$ ,  $w_{n+1}$  et  $x_{n+1}$  à  $u_n$ ,  $v_n$ ,  $w_n$  et  $x_n$  en justifiant.

↳ Pour obtenir les éléments de  $U_{n+1}$  on prend tous les éléments de  $U_n$  auquel on ajoute ( au sens « coller à droite ») n'importe quel chiffre, ce qui donne  $10u_n$  nombres auxquels se rajoutent les  $v_n$  nombres obtenus en ajoutant un « 1 » aux nombres de  $V_n$ . Ainsi  $u_{n+1} = 10u_n + v_n$

↳ Les éléments de  $V_{n+1}$  s'obtiennent en ajoutant un « 1 » à la fin des nombres de  $W_n$ , donc  $v_{n+1} = w_n$

↳ Les éléments de  $W_{n+1}$  s'obtiennent en ajoutant un « 1 » à la fin des nombres de  $X_n$ , donc  $w_{n+1} = x_n$

↳ Les éléments de  $X_{n+1}$  s'obtiennent en ajoutant n'importe quel chiffre sauf « 1 » aux nombres de  $V_n$ ,  $W_n$  et  $X_n$ , donc  $x_{n+1} = 9(v_n + w_n + x_n)$

3. A l'aide d'un tableur, recopie et complète les 2 premières lignes du tableau complété.

4. Insère pour les lignes suivantes des formules pour automatiser le calcul de valeurs suivantes

On peut entrer :    en A3 =10\*A2+B2                    En B3 =C2  
                           en C3 =D2                                En D3 =9\*(B2+C2+D2)

5. Combien y a-t-il de nombres répondant à la question :

a. Dans  $[0 ; 9\ 999\ 999\ 999]$  ? C'est  $u_{10} = 72\ 915\ 400$

b. Dans  $[10\ 000\ 000\ 000 ; 10\ 999\ 999\ 999]$  ? C'est  $u_9 = 6\ 394\ 870$

c. Dans  $[10\ 999\ 999\ 999 ; 11\ 099\ 999\ 999]$  ? C'est  $u_9 = 549\ 739$

d. Dans  $[11\ 100\ 000\ 000 ; 11\ 111\ 111\ 111]$  ? Tous =  $11\ 111\ 111\ 111 - 11\ 100\ 000\ 000 + 1 = 11\ 111\ 112$

6. Conclure en répondant à la question initialement posée et enregistrer le fichier tableur dans vos documents.

*Il n'y a plus qu'à ajouter :  $72\ 915\ 400 + 6\ 394\ 870 + 549\ 739 + 11\ 111\ 112 = 90\ 971\ 121$*