Université de Picardie Jules Verne **2011-2012**
UFR des Sciences - LAMFA

PAF - Formation Enseignement des Mathématiques - vendredi 20 janvier 2012

Mathématiques : statistiques et simulation

Dans ce document, je vous propose une première liste d'exercices traitant de différents thèmes de Probabilités et Statistique issus du projet de programme des classes de terminale ; la simulation est présente dans plusieurs d'entre eux. Les questions que vous pourriez vous poser à propos de ces exercices permettront d'alimenter les échanges que nous aurons lors de la formation.

Bon courage dans la préparation de ces exercices.

Cordialement.

Stéphane Ducay le 8 décembre 2011

Conditionnement. Indépendance

Exercice 1.

1) Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$.
Démontrer les égalités $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$.

2) Dans une entreprise, une machine A fabrique 40% des pièces et une machine B fabrique 60% des pièces. Le pourcentage de pièces défectueuses fabriquées par A est de 3%, et par B de 2%. On choisit une pièce au hasard dans la production.

a) Traduire ces données en termes de probabilités d'événements ; les représenter sur un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité que la pièce choisie soit défectueuse.

c) Sachant la pièce choisie défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par A ?

3) Mêmes question qu'au 2) avec trois machines A, B et C, fabriquant respectivement 20%, 30% et 50% des pièces, avec des pourcentages de pièces défectueuses respectivement de 5%, 4% et 1%.

Exercice 2. (avec un peu de loi binomiale, et normale ...)

1) Soient Ω un univers et P une probabilité associés à une expérience aléatoire. Soient A et B deux événements. On rappelle que $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$.
Démontrer que si les événements A et B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont aussi.

2) Chaque matin de cours (du lundi au vendredi), un étudiant peut être victime de deux événements indépendants :
- R : "il n'entend pas son réveil sonner"
- S : "son scooter, mal entretenu, tombe en panne".

II a observé que chaque jour de cours, la probabilité de R est égale $0,1$ et que celle de S est égale à $0,05$. Lorsque qu'au moins l'un des deux événements R ou S se produit, l'étudiant est en retard à l'université ; sinon il est à l'heure.

a) Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, l'étudiant entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

b) Calculer la probabilité que l'étudiant soit à l'heure à l'université un jour de cours donné.

3) Au cours d'une semaine, l'étudiant se rend cinq fois à l'université. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de cours donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où l'étudiant entend le réveil.

a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Justifier votre réponse.

b) Quelle est la probabilité que l'étudiant entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ?

4) On observe le comportement de l'étudiant sur une période de 20 semaines de cours. Calculer la probabilité qu'il y ait entre 85 et 95 jours où il entende le réveil. On pourra utiliser une loi approchée en justifiant son utilisation.

Loi à densité

Exercice 3. Loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$

1) a) A l'aide d'un tableur, effectuer 1000 simulations du tirage d'un nombre x au hasard dans l'intervalle $[0;1]$.

b) Répartir les résultats dans les 10 classes $[0;0.1]$, $]0.1;0.2]$, ..., $]0.9;1]$ et construire l'histogramme des fréquences correspondant (aire des rectangles = fréquence). Que remarque-t-on ? Conjecturer un résultat sur la probabilité qu'un résultat X appartienne à l'une des classes ?

c) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0;1]$. Donner l'expression d'une densité de X et calculer $P(X \leq x)$ pour $x \in [0;1]$.

2) a) Soit $a = 2$ et $b = 5$. A l'aide d'un tableur, effectuer 1000 simulations du tirage d'un nombre x au hasard dans l'intervalle $[0;1]$, puis calculer $y = (b-a)x + a$.

b) Répartir les résultats dans les 12 classes $[2;2.25]$, $]2.25;2.50]$, ..., $]4.75;5]$ et construire l'histogramme des fréquences correspondant. Que remarque-t-on ? Conjecturer un résultat sur la probabilité qu'un résultat Y appartienne à l'une des classes ?

c) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a;b]$. Donner l'expression d'une densité de X et calculer $P(X \leq x)$ pour $x \in [a;b]$.

3) Virginie a un rendez-vous avec Paul à la sortie de son lycée à 17h00, après son cours de Maths. Mais elle ne pourra l'attendre plus de 5 minutes. Paul, qui suit son cours de Maths dans un autre lycée, estime qu'il peut arriver sur le lieu du rendez-vous à tout moment entre 16h55 et 17h10 de manière équiprobable. Si cette hypothèse est exacte, quelle est la probabilité de Paul rencontre Virginie ?

Exercice 4. Loi exponentielle

1) On rappelle pour une variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre λ, on a

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Démontrer que pour tous réels $t \geq 0$ et $h \geq 0$, on a $P_{T>t}(T > t+h) = P(T > h)$.

2) Une usine fabrique 9000 unités d'un produit en un temps donné. Pour cette même période, la demande concernant ce produit, en milliers d'unités, peut-être considérée comme une variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre 1/3.

a) Quelle est la probabilité que la demande dépasse la production ?

b) Quelle devrait être la production pour que cette probabilité soit inférieure à $0,4$?

Exercice 5. Loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$

1) Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

a) Calculer $P(X \leq 2)$ et $P(0 \leq X \leq 1)$.

b) Déterminer le réel x tel que $P(X \leq x) = 0.975$, puis le réel t tel que $P(-t \leq X \leq t) = 0.95$.

2) Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(4;2)$.

a) Calculer $P(X \leq 6)$ et $P(0 \leq X \leq 6)$.

b) Déterminer le réel x tel que $P(X \leq x) = 0,975$.

3) Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$. Calculer $P(X \leq \mu + \sigma)$, $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$ et $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$.

Intervalle de fluctuation

Exercice 6.

1) a) A l'aide d'un tableur, effectuer 1000 simulations d'une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, avec $n = 100$ et $p = 0.2$. Calculer les valeurs simulées de $Y = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ et construire un histogramme des fréquences correspondant.

b) Reprendre le travail du a) en prenant $n = 192$ et $p = 0.25$. Que remarque-t-on ? Conjecturer.

2) On admet que si X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, avec $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, alors $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. On pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

En déduire que $P\left(p - \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,1.96 \leq F_n \leq p + \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,1.96\right) = 0.95$.

TABLE 1

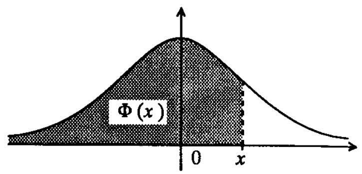
Fonction de répartition de la loi normale réduite

Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geqslant 0$, la table donne la valeur :

$\phi(x) = P(U \leqslant x)$.

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.
Pour $x < 0$, on a :

$\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

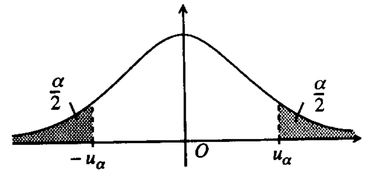
TABLE 2

Loi normale réduite (table de l'écart réduit)

Si U est une variable aléatoire qui suit la loi normale réduite, la table donne, pour α choisi, la valeur u_α telle que :

$P(|U| \geqslant u_\alpha) = \alpha$.

La valeur α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013