

Travail informatique	Nombres complexes	Geoplan
Etude d'une transformation		Durée: 1H

On considère dans le plan complexe, le point A d'abscisse i.

On étudie l'application f du plan complexe privé du point A dans lui-même qui à un point d'affixe z différent de i associe le point d'affixe z' tel que $z' = \frac{iz+2}{z-i}$ (A n'a ni image ni d'antécédent par f).

On note g l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui à z différent de i associe $\frac{iz+2}{z-i}$

I]Figure sous geoplan et conjectures:

Dans le menu Créer , existe un sous-menu Avec les complexes.

- . Afficher le repère ().
- . Placer le point A et le point B d'affixe 2i (**Avec les complexes**).
- . Zoomer ().
- . Placer un point M (**Point**).
- . Créer l'affixe z de M (**Avec les complexes**).
- . Créer la fonction g (**Avec les complexes**).
- . Créer le point M' image de M par f (son affixe est g(z)) (**Avec les complexes**).
- . Créer l'affixe z' de M (**Avec les complexes**).
- . Afficher la valeur de z puis la valeur de z' (**Affichage**, 3 décimales).

1) Existe-t-il des points invariants par f?

Pour la question 2, pour aider à la conjecture:

Dès qu'un point M vérifie la condition demandée, créer un point ayant l'affixe de M (**Avec les complexes**) pour garder une trace des points valables.

2)a) Conjecturer l'ensemble des points M dont l'image appartient à l'axe des réels.

b) Conjecturer l'ensemble des points M dont l'image appartient à l'axe des imaginaires.

- . Créer la médiatrice du segment [AB] (**Ligne**).
- . Placer le point M dessus (**Point libre**).
- 3) Conjecturer l'image de la médiatrice du segment [AB].

- . Créer le cercle de centre A et de rayon 2. (**Ligne**).
- . Placer le point M dessus (**Point libre**).
- 4) Conjecturer l'image du cercle de centre A et de rayon 2.

II]Preuves:

5) Vérifier que A ne possède pas d'antécédent par f.

6)a) On pose $z=x+yi$ (z différent de i). Calculer la forme algébrique de z'.

b) En déduire les preuves des conjectures de la question 2.

7)a) Montrer que pour tout nombre complexe z différent de i, $|z'| = \frac{|z-2i|}{|z-i|}$.

b) En déduire la preuve de la conjecture de la question 3.

8)a) Montrer que pour tout nombre complexe z différent de i, $|z'-i||z-i|=1$.

b) En déduire la preuve de la conjecture de la question 4.

9) Montrer le résultat de la question 1.