



Olympiades nationales de mathématiques



Académie d'Amiens

Mercredi 15 mars 2017 de 8 heures à 12 heures 10

- Pause de 10 heures à 10 heures 10

Séries ES/L/STMG/ST2S

Énoncés de la deuxième partie de 10 heures 10 à 12 heures 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

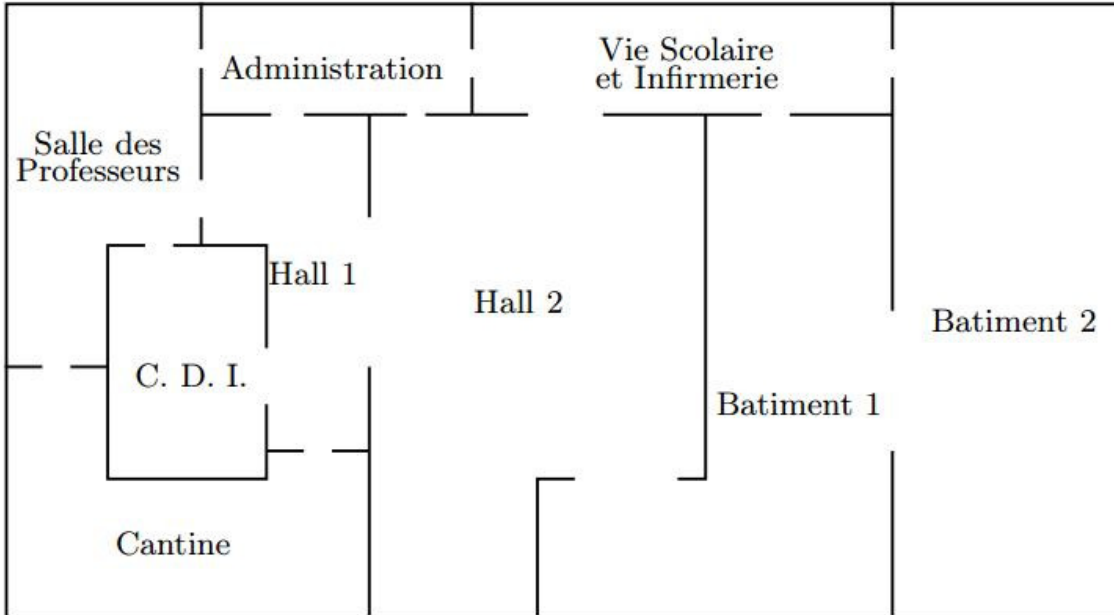
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.



Exercice académique numéro 1

Dans un lycée

On donne ici le plan simplifié d'un lycée :



1) Jean est le gardien du lycée. Le matin, Jean doit allumer toutes les lumières du lycée avant l'arrivée des élèves.

a) Il part du Hall 2, est-il possible qu'il parcoure tout l'établissement sans avoir à passer deux fois par la même pièce ?

Où finira-t-il ? (On ne s'occupe pas de savoir comment Jean entre ou sort de l'établissement)

Si oui, représenter un tel trajet sur le plan du lycée donné en annexe 1.

b) Un tel parcours est-il possible si Jean part du Bâtiment 2 ? Pourquoi ?

2) A la fin de la journée, Jean doit vérifier qu'il ne reste personne dans l'établissement. Pour cela, dès qu'il entre dans une pièce, il ferme la porte qu'il vient de passer à clef, traverse la pièce puis ferme à clef la porte qu'il vient d'utiliser pour sortir de la pièce.

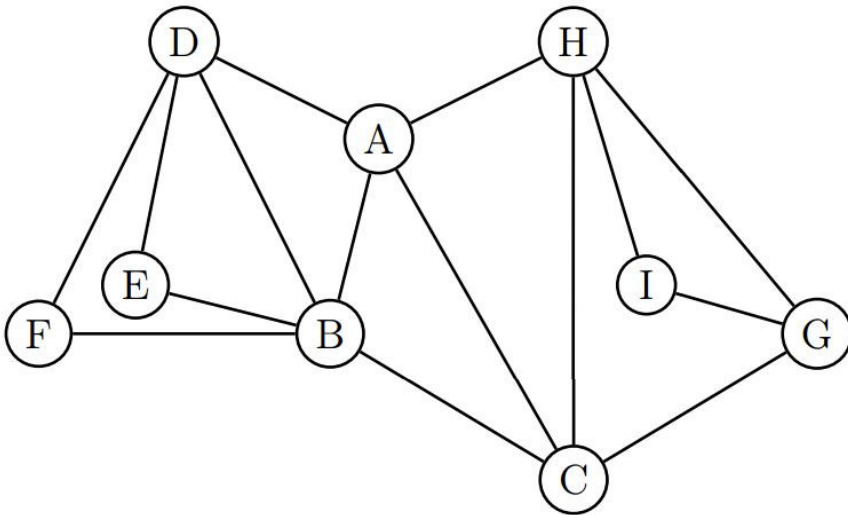
On ne s'occupe toujours pas de savoir comment Jean entre ou sort de l'établissement.

En partant dans le Hall 1 et en terminant dans le Bâtiment 1, est-il possible que Jean parcoure tout l'établissement sans avoir à ré-ouvrir une porte déjà fermée ?

Si oui, représenter son parcours sur le plan donné en annexe 2.

3) Le proviseur du lycée décide de refaire les peintures des murs de l'établissement de plusieurs couleurs différentes. Il souhaite que deux salles voisines (c'est-à-dire avec une porte en commun) aient des couleurs différentes et se demande alors combien de couleurs il va devoir utiliser au minimum.

Pour l'aider dans sa recherche, on a représenté le plan du lycée à l'aide d'un graphe :



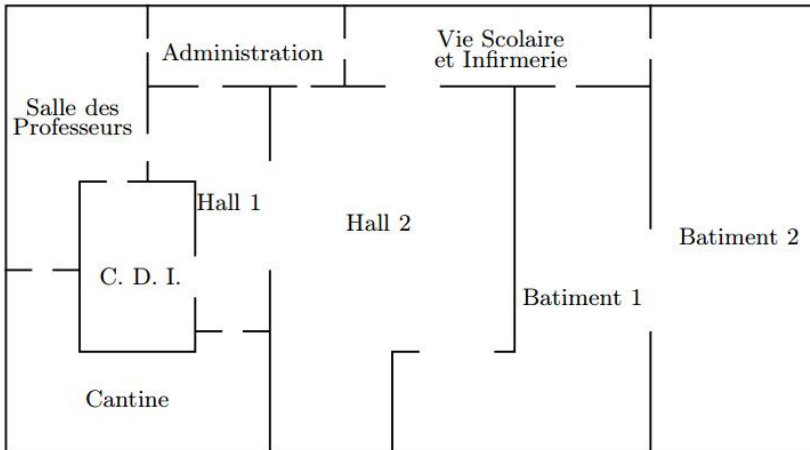
Chaque pièce du lycée est représentée par un sommet (par exemple le sommet A représente l'administration) et les arêtes représentent les différentes portes pour communiquer entre les pièces.

On va donc attribuer une couleur à chaque sommet de sorte que deux sommets reliés par une arête ne soient pas de la même couleur, et ce avec le moins de couleurs possibles.

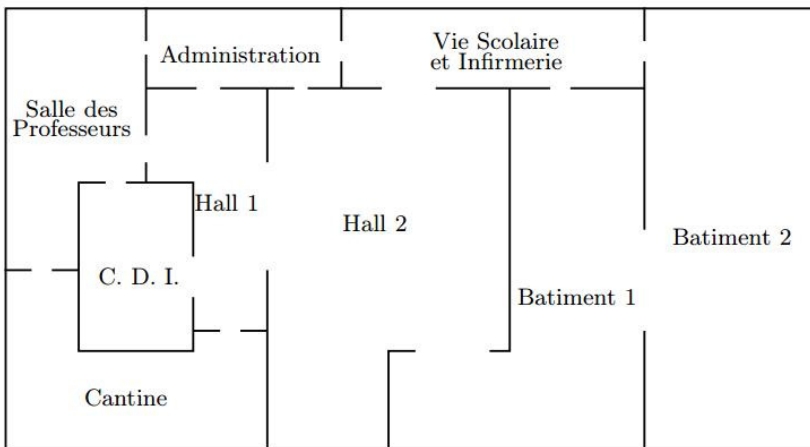
- a) En considérant les sommets A, H et C, expliquer pourquoi le proviseur doit choisir au moins trois couleurs différentes.
- b) Colorier alors les trois sommets A, C et H. On va ensuite essayer de n'utiliser que ces trois couleurs pour le reste du lycée.
- c) Quelle doit être la couleur du sommet B ? Et du sommet G ?
- d) En suivant le même raisonnement "de proche en proche" déterminer une couleur pour chaque sommet du graphe.
- e) Finalement, quel est le nombre minimal de couleurs que doit choisir le proviseur ?
- f) A l'aide du nombre de portes et donc d'arêtes pour chaque sommet, identifier chaque sommet à une pièce du lycée.
- g) Colorer alors le plan du lycée donné en annexe 3.

ANNEXES : (à rendre avec votre copie)

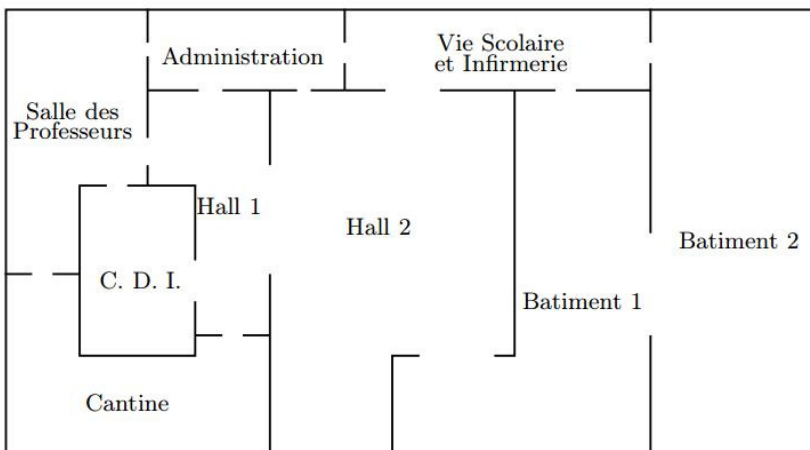
1) Parcours de Jean sans passer deux fois par la même pièce en partant du Hall 2 :



2) Parcours de Jean pour fermer les portes à clef sans en ré-ouvrir en partant du Hall 1 et en terminant dans le Bâtiment 1 :



3) Colorer les pièces pour que deux pièces voisines n'aient pas la même couleur :



Exercice académique numéro 2

Langage codé

Pour coder un message afin de le garder secret, on utilise la méthode de chiffrement suivante.

- On remplace chaque lettre du message par son rang x dans l'alphabet, allant de 0 pour A à 25 pour Z, comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Les autres signes (virgules, espaces, points,...) sont supprimés.

- On calcule le reste y de la division euclidienne de $7x + 5$ par 26.
- On remplace la lettre initiale x par celle ayant pour rang y .

Cette technique de codage est appelée chiffrement affine.

- 1) Vérifier, qu'en effectuant la division euclidienne de 89 par 26, on obtient 3 comme quotient et que le reste est 11.
En déduire que, par cette méthode, la lettre M est codée par la lettre L.
- 2) Coder le mot MATHS.
- 3) On admet la propriété suivante que l'on pourra utiliser lorsque nécessaire dans toute la suite de l'exercice :
Soient a et b deux entiers relatifs et c un entier naturel non nul.
 a et b ont le même reste dans la division euclidienne par c si et seulement si $a-b$ est un multiple de c .

Montrer que, pour tout entier relatif k , si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par c alors les entiers ka et kb ont le même reste dans la division euclidienne par c .

- 4) Soient x et y des entiers.
 - a) Montrer que si y et $7x$ ont le même reste dans la division euclidienne par 26 alors $15y$ et x ont le même reste dans la division euclidienne par 26.
 - b) Démontrer la réciproque de l'implication précédente.
- 5) Déduire alors que :
 y et $7x + 5$ ont même reste dans la division euclidienne par 26 équivaut à x et $15y + 3$ ont même reste dans la division euclidienne par 26.
- 6) A l'aide de la question précédente, décoder le mot ZERLGJFAHB.

Déchiffrer un message codé par un chiffrement affine ne pose pas de difficulté. La cryptographie utilise des techniques bien plus complexes pour crypter des textes ou des données et en assurer l'inviolabilité.