Région académique HAUTS-DE-FRANCE — académie Amiens

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Région académique HAUTS-DE-FRANCE — académie Lille

Olympiades nationales de mathématiques

Académies d'Amiens et de Lille

Mercredi 13 mars 2019 de 8h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

Séries autres que la série S

Énoncés de la deuxième partie de 10h10 à 12h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.** Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique numéro 1

Des nombres renversants !

Sophie s'amuse souvent avec les nombres entiers naturels ; elle joue ainsi à les « renverser ».
Le ***renversé*** d'un entier naturel est l'entier naturel formé avec les mêmes chiffres mais écrit dans le sens contraire.

Exemple : 123 est le renversé de 321. (Remarque : si un nombre est égal à son renversé, on dit qu'il est *palindrome*.)

1. Sophie a constaté que 32 et 56 ont la même somme que leurs renversés, 23 et 65. Elle remarque que 32 et 56 ont la caractéristique suivante : la somme des chiffres des dizaines, 3 et 5, est égale à la somme des chiffres des unités 2 et 6.

a) Donner un autre couple de nombres à deux chiffres ayant cette caractéristique sur les dizaines et les unités. Leur somme est-elle égale à celle de leurs renversés ?

b) Sophie conjecture la proposition suivante, appelée $\mathcal{P}_1$:
« La somme de deux nombres entiers à deux chiffres n_1 et n_2, non multiples de 10, est égale à la somme de leurs renversés, *si, et seulement si*, la somme des chiffres de leurs dizaines est égale à la somme des chiffres de leurs unités. »
Elle veut prouver que sa conjecture est vraie.
Pour cela, elle décompose dans la base 10 chacun des nombres n_1 et n_2 :

$$n_1 = 10d_1 + u_1 \qquad \text{et} \qquad n_2 = 10d_2 + u_2,$$

où d_1 et d_2 sont les chiffres des dizaines respectifs de n_1 et n_2, u_1 et u_2 sont les chiffres des unités respectifs de n_1 et n_2.

Prouver que la somme des nombres n_1 et n_2 est égale à la somme des renversés de n_1 et n_2 si, et seulement si, $d_1+d_2 = u_1+u_2$.

2. Sophie s'intéresse aussi aux nombres renversés à trois chiffres. Après plusieurs essais sur la somme de deux nombres à trois chiffres et celle de leurs renversés, elle conjecture la proposition suivante, appelée $\mathcal{P}_2$:
« La somme de deux nombres entiers à trois chiffres n_1 et n_2 (non multiples de 10) est égale à la somme de leurs renversés, *si, et seulement si*, la somme des chiffres de leurs centaines est égale à la somme des chiffres de leurs unités. »

a) Donner un couple de deux nombres entiers à trois chiffres qui vérifie cette propriété.

b) Par une démarche analogue à celle proposé au b) ci-dessus, démontrer la proposition $\mathcal{P}_2$.
Indication : On pourra noter c le chiffre des centaines d'un nombre à trois chiffres, d le chiffre des dizaines, u le chiffre des unités…

3. Sophie veut généraliser les propriétés $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ aux nombres entiers à quatre chiffres.
   Elle énonce la proposition suivante :
   « La somme de deux nombres entiers à quatre chiffres n_1 et n_2 (non multiples de 10) est égale à la somme de leurs renversés si la somme des chiffres des milliers est égale à la somme des chiffres de leurs unités. »

   a) La somme des nombres 3 141 et 2 034 est-elle égale à la somme de leurs renversés ? La proposition de Sophie est-elle vraie ? Que constate-t-on sur la somme de ces deux nombres et celles de leurs renversés ?

   b) Compléter les cases par des entiers naturels **distincts** dans les nombres à quatre chiffres ci-dessous pour que leur somme soit égale à celle de leurs renversés :
      3 ☐☐ 4 et 2 ☐☐1.

   c) Que doit ajouter Sophie comme hypothèse dans l'écriture de sa proposition pour qu'elle soit vraie pour des nombres à quatre chiffres, avec un chiffre des centaines distinct de celui des dizaines ?

4. Qu'en est-il pour les nombres entiers à 5 chiffres (non multiples de 10)? Enoncer une conjecture la plus précise possible.

5. Sophie envoie par mail l'énigme suivante à son ami anglais Alan :
   « I'm an odd number between 54 and 90. If I'm added to my inverted number, then this sum is an even number between 54 and 90. Who am I ?" * **Quel est le nombre que doit trouver Alan?**

*Traduction: « Je suis un nombre impair situé entre 54 et 90. Si on m'ajoute à mon renversé, on obtient un nombre pair situé entre 54 et 90. Qui suis-je ? »

Exercice académique numéro 2

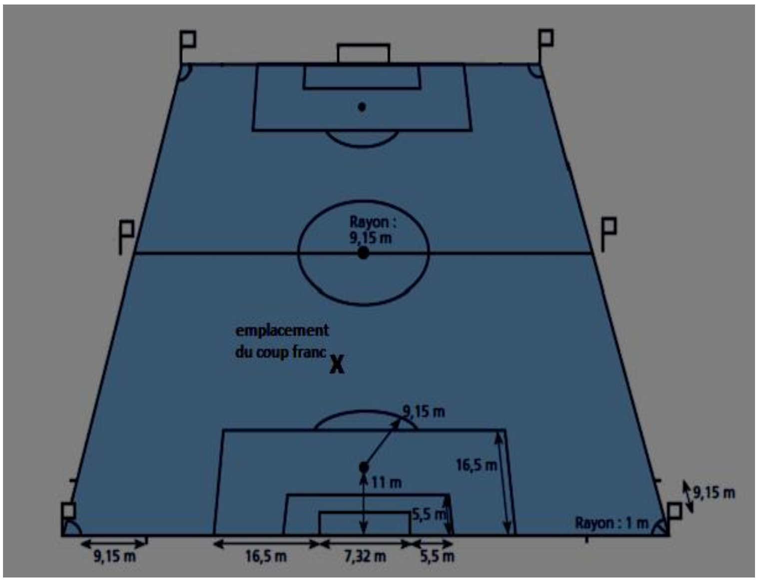
Le coup franc de la victoire

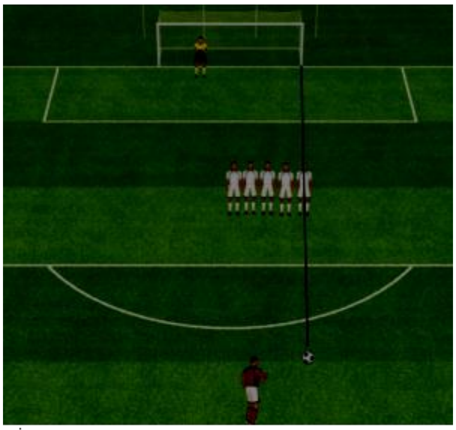
Avant la finale de la coupe du monde, Antoine Griezmann s'était entraîné à tirer des coups francs directs. Il cherchait à déterminer, en fonction de la distance du but à laquelle il se trouvait, un moyen d'envoyer le ballon se loger dans la lucarne (l'un des deux coins hauts du but) du gardien adverse.

On suppose que la trajectoire d'un coup franc direct est décrite par une parabole du plan. On néglige toute force extérieure pouvant modifier la trajectoire du ballon (frottements de la pelouse sur le ballon, vent, etc.). **On prendra pour origine du repère l'endroit où est placé le ballon pour le coup franc**.

On rappelle les dimensions suivantes (voir figure de gauche) pour un terrain de football :

- le but mesure **2,44 mètres de haut** pour **7,32 mètres de long** ;
- la surface de réparation mesure **16,50 mètres de large** ;
- pour tirer un coup franc, le gardien adverse peut placer son mur de joueurs à 9,15 mètres de l'endroit où l'arbitre a donné la faute, et où est placé le ballon. Afin de simplifier les calculs, **nous considérons que le mur est placé à 9,50 mètres du ballon**.





A. L'arbitre accorde un coup franc à l'équipe d'Antoine Griezmann, situé à 26 mètres de la ligne de but du gardien (voir figures ci-dessus). Afin de mettre le ballon hors de portée du gardien, Antoine Griezmann décide d'envoyer le ballon en face de lui, à une hauteur de 2 mètres. Il devra cependant faire passer son ballon au-dessus du mur de joueurs, d'une taille de 1,85 mètre. Nous supposerons dans un premier temps que le mur reste immobile au sol. Déterminer une fonction f polynôme du second degré permettant de modéliser la trajectoire d'un tel coup franc.

B. À l'aide de votre fonction précédemment trouvée, déterminer à quelle distance de l'endroit où a été posé le ballon la fonction atteindra son maximum. Quel est la valeur de ce maximum ?

C. On suppose maintenant, en plus des hypothèses de la question **A.**, que **le mur saute verticalement d'une hauteur de 35 cm** afin de gêner Antoine Griezmann, et que la trajectoire du ballon qu'il envoie atteint son maximum en $x = 17$ mètres. Dans ces conditions, est-il possible de déterminer une fonction g permettant à Antoine Griezmann de marquer un but dans la lucarne, à 2 mètres ? Si oui, la déterminer.

D. On souhaite écrire un algorithme permettant de savoir si la fonction choisie peut permettre de marquer un but lorsque le mur saute. Compléter les deuxièmes lignes de chaque condition dans cet algorithme afin qu'il permette de savoir si le ballon n’est pas arrêté par le mur et si le tir est cadré.

```
Saisir a,b,c

Si x=9,5
   si a*x^2+b*x+c ......
   alors renvoyer BUT POSSIBLE
   sinon
   renvoyer PAS BUT
   FinSi
FinSi

Si x=26
   si ...........................
   alors renvoyer BUT POSSIBLE
   sinon
   renvoyer PAS BUT
   FinSi
FinSi
```