

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2010

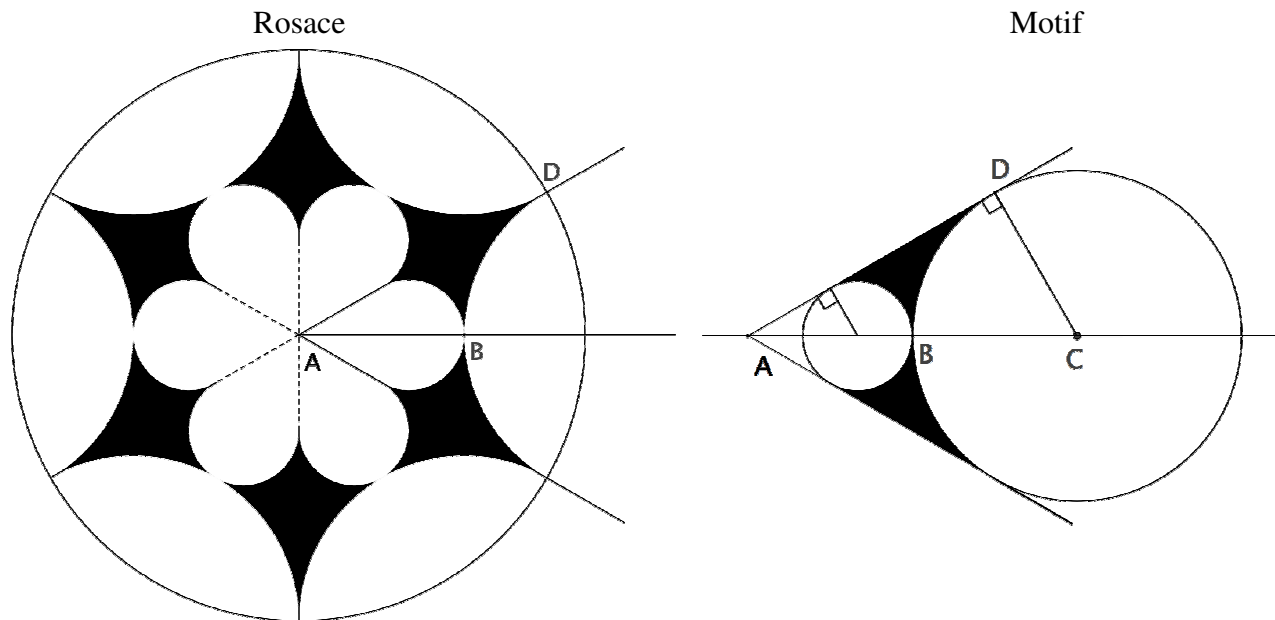
MERCREDI 10 MARS 2010 (14h – 18h)

SUJET PREMIERE ES / L / STG / ST2S

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Exercice National 1 : La Rosace

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.



- 1) Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?
- 2)
 - a) Montrer que $AB = BC$.
 - b) Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?
 - c) D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$. Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?
- 3) On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Exercice National 2 : A la recherche du « chaînonze »

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :

« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11 ».

Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car $7+9-5=11$ et $0+9-9=0$.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.

Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

- 1) Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?
- 2) Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{ème} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

- 3) Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constate-t-on ?

On appelle **chaînonze fini** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.

On appelle **chaînonze n-périodique** un chaînonze infini constitué d'une séquence de n chiffres se répétant indéfiniment.

- 4) On considère la chaîne « $a b$ » où a et b sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.
 - a) Etudier le cas particulier « $a a$ ».
 - b) Etudier le cas $b = a - 1$.
 - c) Etudier les autres cas.
- 5) Montrer qu'en prolongeant la chaîne « $a b$ » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

Exercice Académique 1 : Une fonction étrange

Soit f la fonction qui à tout couple d'entiers naturels $(x; y)$ associe l'entier naturel tel que :

$$f(0; y) = y + 1 \quad f(x; 0) = f(x - 1; 1) \quad f(x + 1; y + 1) = f(x; f(x + 1; y))$$

Calculer $f(2; 1)$ et $f(2; 2)$.

Exercice Académique 2 : Le damier

Un tableau carré a 2010 lignes (numérotées de 1 à 2010) et 2010 colonnes (numérotées de 1 à 2010). Ses cases sont peintes en blanc ou noir, comme celles d'un damier ; et la case située au croisement de la ligne 1 et de la colonne 1 est noire.

Dans chaque case, on écrit le produit du numéro de sa ligne et du numéro de sa colonne.

On note N la somme des nombres inscrits dans les cases noires et B la somme des nombres inscrits dans les cases blanches.

- 1) On pose N_i la somme des nombres inscrits dans les cases noires de la $i^{\text{ème}}$ ligne et B_i la somme des nombres inscrits dans les cases blanches de la $i^{\text{ème}}$ ligne.
 - a) Montrer que $N_1 - B_1 = -1005$ et $N_2 - B_2 = 2 \times 1005$.
 - b) Plus généralement, montrer que $N_i - B_i = \lambda \times i \times 1005$ avec $\lambda = 1$ lorsque le numéro de la ligne est pair, et $\lambda = -1$ lorsque le numéro de la ligne est impair.
- 2) En déduire que $N - B = 1005^2$.