

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2012

MERCREDI 21 MARS 2012 (8h – 12h)

SUJET PREMIERE S

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice National 1 :

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

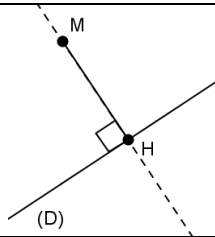
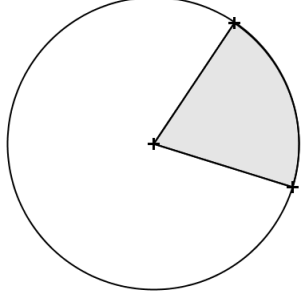
- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 1) Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.
- 2) Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.
- 3) Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
 - a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
 - b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
 - c) Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
 - d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
- 4) Soit n un entier *digisible* quelconque.
 - a) Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
 - b) Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n .
 - c) Déterminer le plus grand entier *digisible*.

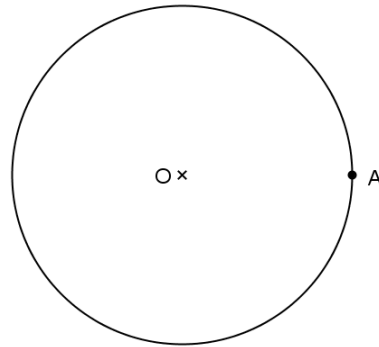
Exercice National 2 :

Rappels

<ul style="list-style-type: none">• On appelle distance entre un point M et une droite (D) la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.	
<ul style="list-style-type: none">• Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors l'aire de la portion de disque grisée vaut $\pi R^2 / 360$. <p>Dans la partie II de l'exercice, on considèrera la distance d'un point M à un segment $[BC]$ comme étant la distance du point M à la droite (BC).</p>	

Partie I

Soit C un cercle de centre O , A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



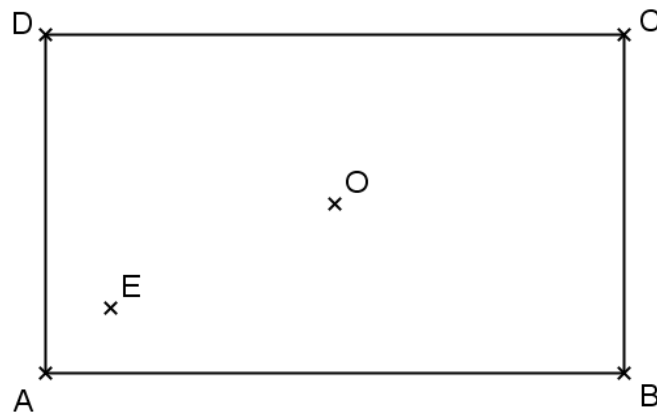
- 1) Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A .
- 2) Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A .
- 3) Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D .
Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit $ABCD$ un rectangle de longueur $AB = 20$ cm et de largeur $BC = 12$ cm, de centre O .

Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A , à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).

Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle $ABCD$.



- 1) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté $[BC]$ que du côté $[AD]$?
- 2) a) Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés $[AB]$ et $[BC]$.
b) Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté $[BC]$ que du côté $[AB]$.
c) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté $[BC]$ que du côté $[AB]$?
- 3) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté $[AB]$ que des trois autres côtés $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$?
- 4) Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
- 5) Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A , B , C et D ?

Exercice Académique 1 :

On considère des octogones réguliers, de même centre O.

Aux sommets de l'octogone central, on note les huit premiers entiers non nuls.

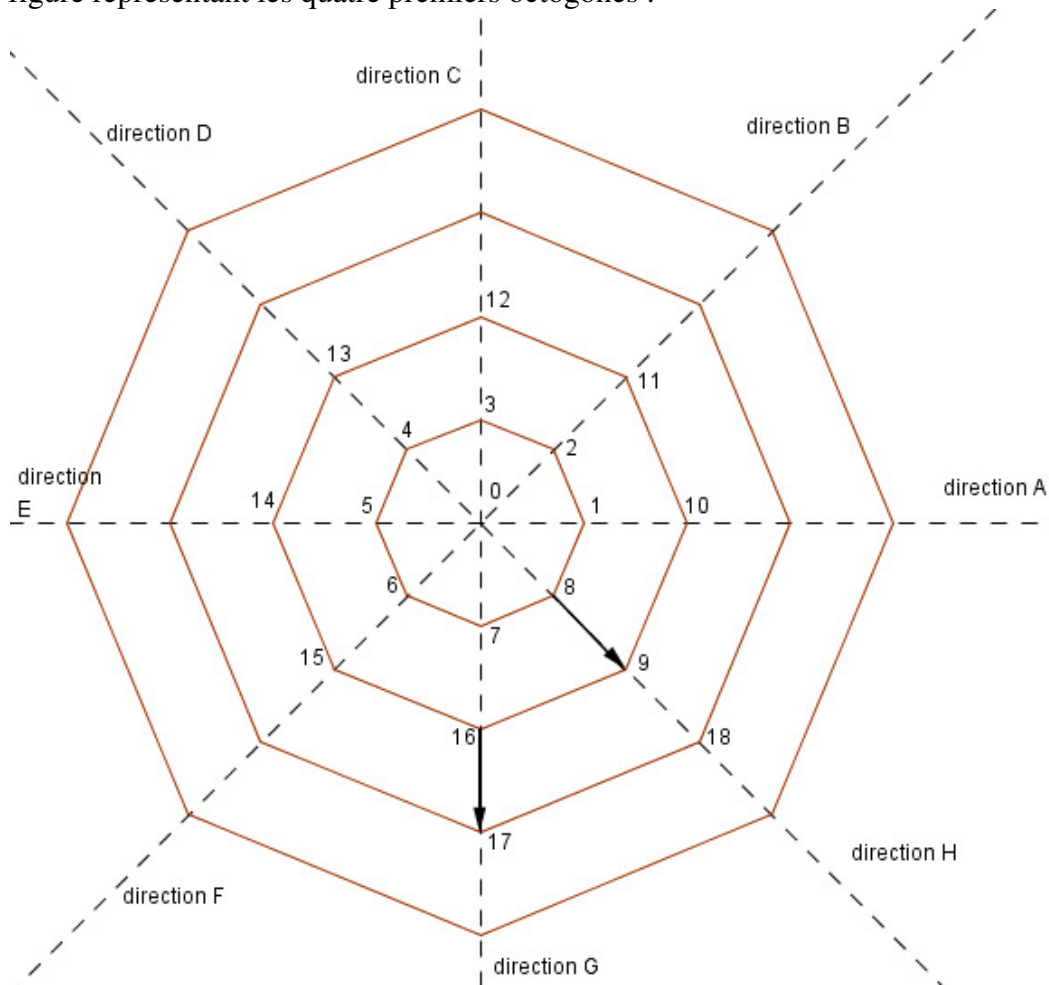
Sur les sommets du deuxième octogone, on inscrit les 8 nombres entiers suivants, avec une rotation de 45 degrés ($\frac{\pi}{4}$ radians) autour du point O.

Et ainsi de suite ...

On dit que chaque nombre entier a une direction (A, B, C, D, E, F, G ou H par rapport à l'origine O).

Par exemple, 1 a pour direction A, 2 a pour direction B ...

Voici une figure représentant les quatre premiers octogones :



- 1) Quel sera le premier entier inscrit sur le quatrième octogone ? Préciser sa direction.
- 2) Déterminer le premier entier inscrit sur le huitième octogone ? Préciser sa direction.
- 3) On considère le $n^{\text{ième}}$ octogone.
 - a) Exprimer en fonction de n le premier nombre inscrit sur le $n^{\text{ième}}$ octogone.
 - b) On suppose dans cette question que $n = 8k$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $k \neq 0$.
Quelle est la direction du premier nombre inscrit sur le $n^{\text{ième}}$ octogone ?
- 4) Placer sur un octogone, les nombres associés aux sommets du $2012^{\text{ème}}$ octogone (la figure ne sera évidemment plus à l'échelle).
- 5) Sur quel octogone et dans quelle direction se placera le nombre 806002 ?

Exercice Académique 2 :

A et B sont deux points d'un cercle de centre O et de rayon 5 tels que $AB = 6$.

Le carré PQRS est inscrit dans le secteur angulaire OAB de sorte que P est sur le rayon [OA], S est sur le rayon [OB], Q et R sont deux points de l'arc de cercle reliant A et B.

- 1) Faire une figure correspondant à la situation proposée.
- 2) Calculer l'aire du carré PQRS.