Olympiades académiques de mathématiques

Académie d'Amiens

Mercredi 18 mars de 8 heures à 12 heures

Série S

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

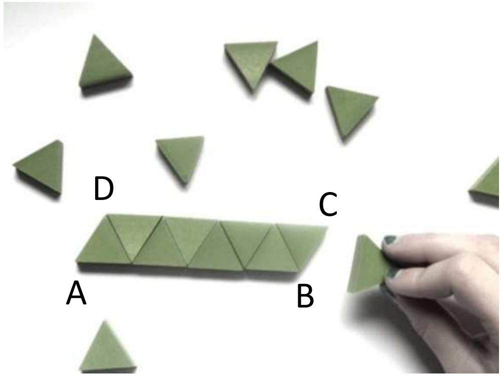
Durée de la composition : 4 heures

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de … heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Exercice numéro 1

(proposé par le jury national)

Défi entre sœurs



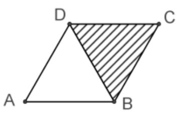
Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.
Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- L = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- l = BD la longueur de la diagonale [BD].

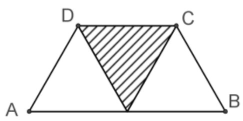
PARTIE 1

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

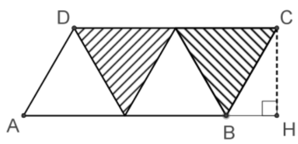
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



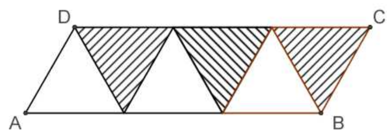
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

PARTIE 2

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.
2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?
3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

PARTIE 3

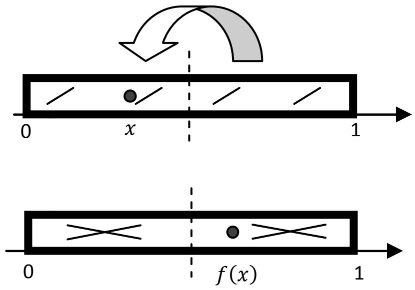
Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :
1re propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »
2e propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »
On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.
2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?
3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\,015}$?
4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.
5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi (détaillez votre démarche)? Si oui, démontrez-le.

Exercice numéro 2

(proposé par le jury national)

On est les rois !



Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.

Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de [0, 1] appartient à [0, 1].

2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par f d'un élément x de $[0\,,1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions suivant l'abscisse $\frac{1}{3}$? l'abscisse 0, 33 ? Commentez.

2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.

3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.

4. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme suivant afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0. Que se produit-il si l'hypothèse de travail de cette question n'est pas vérifiée ?

5. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?

6. Déterminer tous les nombres de $[0\,,1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe** afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).

2. D'après la question 6, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancez une explication.

Annexe.

```
Variables
        x est un élément de [0 ,1]
Début
        Saisir  le nombre x compris entre 0 et 1
        Tant que x ≠ 0  faire
                Si  x ≤ 1/2 alors
                        x prend la valeur 2 x
                Sinon
                x prend la valeur 2(1 − x)
        Fin tant que
Fin
```

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Exercice numéro 3

(proposé par le jury académique)

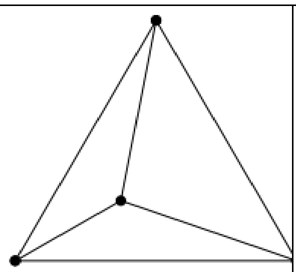
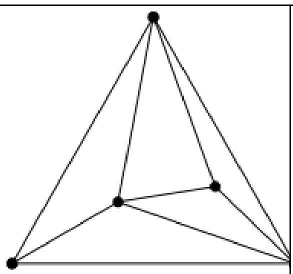
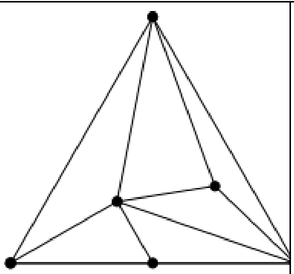
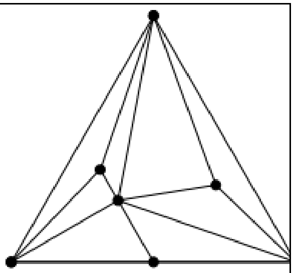
Le jeu de Sperner

Le jeu de Sperner oppose deux joueurs, que l'on appellera ici Joueur 1 et Joueur 2.

Construction du plateau de jeu : Une des particularités de ce jeu, c'est que son plateau est entièrement conçu par l'un des joueurs, disons ici le Joueur 1.
On commence par tracer un grand triangle, appelé triangle initial. Dans toute la suite, on appellera mini-triangle tout triangle contenu dans le triangle initial mais ne contenant pas d'autre triangle.

- On choisit un des mini-triangles (au début, il n'y a donc qu'un seul choix possible, c'est le triangle initial).
- Dans le mini-triangle choisi, on place un point. Ce point peut éventuellement être sur l'un des côtés du mini-triangle, mais uniquement si le côté en question est sur l'un des côtés du triangle initial.
- On utilise le point ainsi placé pour séparer le mini-triangle choisi en plusieurs mini-triangles, en reliant le point aux sommets du mini-triangle.

Voici les étapes de construction d'un exemple de plateau de jeu :

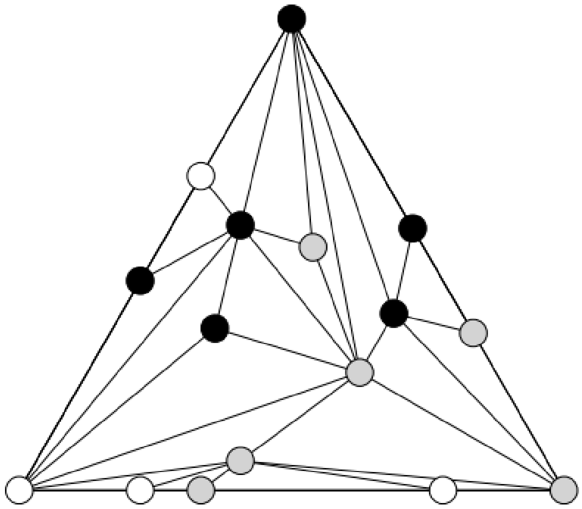
			
On dessine un grand triangle dans lequel on place un point (ici à l'intérieur), que l'on utilise pour séparer le triangle en trois mini-triangles.	On choisit un de ces mini-triangles, on y place un point (ici à l'intérieur) et on l'utilise pour séparer le mini-triangle choisi en trois mini-triangles.	On choisit à nouveau un des mini-triangles et on recommence, mais cette fois le point placé est situé sur le côté du mini-triangle choisi.	On recommence une dernière fois. On obtient ainsi un plateau composé de 8 mini-triangles.

Après avoir construit le plateau, place au jeu ! Après que le Joueur 1 ait fini de construire le plateau, le Joueur 1 colorie les 3 sommets du triangle initial avec trois couleurs différentes, ici blanc, gris et noir. Ensuite, les joueurs colorient à tour de rôle les sommets des mini-triangles, en commençant par le joueur 2, et en respectant la seule règle suivante:
<u>Les sommets situés sur un des côtés du triangle initial ne peuvent être coloriés que de l'une des deux couleurs situées aux extrémités de ce côté.</u>
Par exemple, sur le côté du triangle initial dont l'une des extrémités est blanche et l'autre grise, on ne peut mettre que du blanc ou du gris. Par contre, pour colorier les points situés à l'intérieur du triangle initial, il n'y a aucune règle : on peut utiliser n'importe laquelle des trois couleurs (blanc,

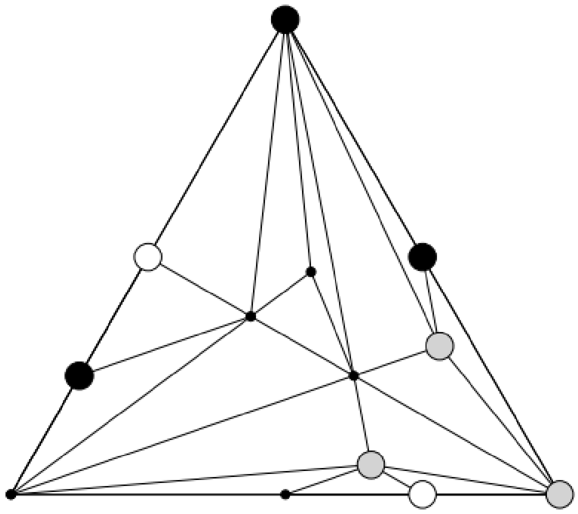
gris, noir).

Fin du jeu : Le jeu s'arrête dès que tous les sommets ont été coloriés. Si les trois sommets de l'un des mini-triangles sont chacun d'une couleur différente, autrement dit quand l'un de ces sommets est noir, un autre blanc et le dernier gris, alors le Joueur 2 a gagné. Par contre, si tous les sommets ont été coloriés et qu'aucun mini-triangle ne contient les trois couleurs, alors le Joueur 1 a gagné.

a) Voici un exemple de partie. Qui a gagné ?



b) Simulez une partie : voici une partie dont certaines couleurs ont été effacées. Complétez-là à votre guise, en commençant par les sommets.



Dans votre exemple, qui a gagné ?

2. **Un jeu équitable ?** Imaginons que le plateau de jeu représente le plan d'une maison, dont le côté blancgris du triangle initiale est la façade avant et dont les mini-triangles sont les pièces. Un mur est donc représenté par le segment reliant deux points consécutifs. Dans cette maison, il y a une porte sur chaque segment dont une des extrémités est blanche et l'autre grise. On entre dans la maison, et on passe de pièce en pièce en utilisant les différentes portes, sans jamais revenir en arrière.
   a) Reprendre l'exemple de la question 2)a), et y placer les différentes portes. Tracer alors les différents chemins possibles.
   b) Dans le cas général, justifier que le nombre de portes sur la façade avant est impair.

c) A partir de cette question, on suppose qu'aucun des mini-triangles ne contient les trois couleurs.
   i. Montrer qu'à chaque fois qu'on entre dans pièce, on peut en sortir par une et une seule autre porte.
   ii. Si on entre dans la maison par une porte de la façade avant, par combien de portes peut-on sortir de la maison ?
   iii. Que peut-on en déduire sur le nombre de portes de la façade avant ?
   iv. Si vous souhaitez gagner à ce jeu, vaut-il mieux prendre le rôle du joueur 1 ou du joueur 2 ?

Exercice numéro 4

(proposé par le jury académique)

Quelles sont les dimensions du rectangle ci-dessous sachant qu'il a été découpé en trois morceaux de même aire.