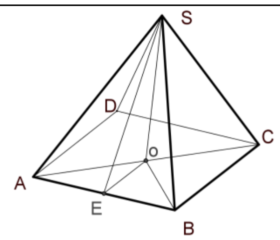
<u>Corrigés des Olympiades 1ères 2016 de l'académie d'Amiens</u>

<u>Exercice national 1 (Toutes séries) :</u>

Échanges thermiques

1. ***a. b. c.*** Calculs de compacité

	Cube de côté a	Demi-sphère de rayon r	Pyramide à base carrée de côté a, de hauteur a	
Surface extérieure	$6a^2$	$3\pi r^2$	$a^2(\sqrt{5}+1)$	Le calcul de la surface extérieure demande celui de la hauteur SE, qui est l'hypoténuse de SOE, rectangle en O
Volume	a^3	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{3}a^3$	
Facteur de compacité	$\frac{6}{a}$	$\frac{9}{2r}$	$\frac{3(\sqrt{5}+1)}{a}$	

d. Les échanges thermiques avec l'extérieur sont d'autant plus grands que le facteur de compacité est élevé. Note : Le facteur de compacité est également pris en compte pour analyser les coûts de packaging, de stockage ou de transport d'une marchandise.

2. ***a.*** On développe le second membre…

b. Le second membre est un nombre positif, donc le premier aussi.

c. L'inégalité précédente, valable pour tout triplet (a, b, c), s'applique à tout triplet de produit 1, et aux racines cubiques…

d. et ***e.*** Le volume d'un tel pavé est xyz et sa surface extérieure $2(xy+yz+zx)$, d'où le résultat. Comme $xyz=1$, l'inégalité précédente s'applique au triplet $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ dont le produit vaut aussi 1, d'où il résulte que $c \geq 6$. Et comme ce minorant est atteint en (1, 1, 1), c'est un minimum. Le cube de côté 1 réalise le minimum du facteur de compacité des pavés de volume 1. Aucun autre pavé droit de volume 1 de le réalise : l'inégalité **2.** ***b.*** serait stricte.

3. ***a.*** Faire $c=1$ pour obtenir l'équation proposée.

b. Comme $p \leq q \leq r$, la somme $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ est majorée par $\frac{3}{p}$, qui est donc supérieur à $\frac{1}{2}$. Par ailleurs, si $p \leq 2$, la somme des trois fractions unitaires est supérieure strictement à $\frac{1}{2}$.

c. et ***d.*** Comme précédemment, si $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{6}, \frac{2}{q} \geq \frac{1}{6}$. D'autres majorations s'imposent dans les cas qui suivent.

Tableau final. On lit les triplets solutions en colonne.

p	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	6
$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$
q	7	8	9	10	11	12	5	6	7	8	6	6
r	42	24	18	15		12	20	12		8		6

Exercice national 2 (Série S) :

Liber abaci

1. La première décomposition proposée comporte des dénominateurs identiques, la seconde n'est pas une somme d'inverses d'entiers. On peut écrire $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ ou $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$

2. *a.*

k	p	q	n	$pn-q$	qn
1	4	17	5	3	85
2	3	85	29	2	2 465
3	2	2 465	1 233	1	3 039 345
4	1	3 039 345	3 039 345	0	

b. À l'issue du *N*-ième tour de boucle, le quotient $\frac{p_N}{q_N}$, qui est nul, apparaît comme la différence entre $\frac{p_1}{q_1}$ et une somme de fractions unitaires. Donc $\frac{p}{q}$ est bien somme de fractions unitaires. Par ailleurs

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=\frac{p_k}{q_k}-\frac{1}{n_k}<\frac{1}{n_k\ -\ 1}-\frac{1}{n_k}=\frac{1}{(n_k\ -\ 1)n_k}\leq\frac{1}{n_k}$$

prouve que la suite (n_k) est strictement décroissante.

c. On a $p_kn_k-q_k=p_{k+1}$ et $\frac{1}{n_k}\leq\frac{p_k}{q_k}<\frac{1}{n_k-1}$, et donc $p_{k+1}-p_k=p_k(n_k-1)-q_k$. Le membre de droite est strictement négatif, donc la suite des p_k est strictement décroissante. Il s'ensuit qu'il existe un certain *N* pour lequel $p_N=0$. L'algorithme s'arrête.

3. *a.* Le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n}\leq\frac{p}{q}$ est 1. On pourrait accepter 1 comme « fraction unitaire », mais dès que $\frac{p}{q}\geq 2$, 1 sera répété, ce qui est dans tous les cas interdit.
b. Le premier membre de la première inégalité à montrer comporte a termes tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2a}$, dont au moins un est strictement supérieur à $\frac{1}{2a}$, car $a+1<2a$ dès que $a>1$. Le premier membre de la seconde inégalité comporte $3a$ termes, les a premiers sont les mêmes que ceux de la sommes précédente. Pour les autres, on reconnaît : $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2a+2}+\frac{1}{2a+3}+\cdots+\frac{1}{2a+2a}$ que l'on minore en faisant jouer à $2a$ le rôle antérieur de a.
c. $\frac{1}{a+1}<\frac{1}{4}$. En ajoutant à ce premier terme, inférieur à 1, les fractions unitaires « consécutives », on finit par dépasser 1, question précédente (inégalité de droite). Notons b le dernier entier supérieur à a pour lequel la somme est encore inférieure à 1. Bien sûr $b>2a$, question précédente (inégalité de gauche).
d. Considérons un rationnel $\frac{p}{q}$ supérieur à 1 et écrivons $\frac{p}{q}=n+\frac{p'}{q'}$, expression dans laquelle n est la partie entière de $\frac{p}{q}$. Une écriture égyptienne de $\frac{p'}{q'}$ demande des fractions unitaires de dénominateurs inférieurs strictement à un certain N_0. Si on écrit $n=1+1+1+\cdots+1$, on va décomposer chacun des 1 en somme de fractions unitaires (en prenant garde que les dénominateurs soient tous différents).
Pour le premier 1, Utiliser le résultat de la question ***c.*** en prenant pour premier dénominateur $a+1$ un nombre supérieur à N_0. On peut approcher 1 à moins de $\frac{1}{b+1}$. Le rationnel restant est inférieur à $\frac{1}{b+1}$ et admet une écriture égyptienne dont tous les dénominateurs sont supérieurs à $b+1$.
Pour l'éventuel second 1, on recommence, en prenant pour premier dénominateur un entier supérieur à tous ceux utilisés jusque-là.

Ainsi de suite.

Pour varier à l'infini les décompositions, on peut par exemple augmenter de 1 le premier dénominateur intervenant dans la décomposition du premier 1…

<u>Exercice national 2 (Séries autres que la série S) :</u>

Demi-tour !

1. Supposons qu'une des deux opérations concerne le pion *M* et l'autre le pion *N.* Supposons *N* < *M.* On commence par retourner le pion *M*. Tous les pions de numéro inférieur ou égal à *M* changent de couleur. On retourne le pion *N* et tous les pions de numéro inférieur ou égal à *N* changent de couleur. Résultat : seuls les pions de numéros compris entre *N* +1 et *M* ont changé de couleur. Si on pratique ces opérations dans l'ordre inverse, les mêmes pions sont retournés une fois, les mêmes deux fois. L'ordre des opérations n'intervient donc pas.

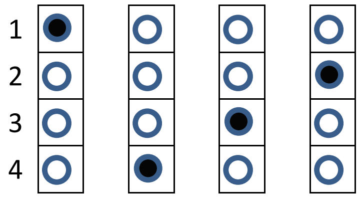
2. Deux opérations identiques s'annihilent.

3. A : 1, B : 4 puis 3 puis 2 puis 1, C : 3 puis 2, D : 4 puis 3 puis 2

4. *a.* et ***b.*** Comme on parcourt la colonne de n à 1, tous les jetons noirs rencontrés sont blanchi. Un jeton noir à partir duquel on réalise une opération n'est plus concerné par les suivantes, donc reste blanc. On réalise au maximum n opérations (cas d'une alternance de jetons noirs et blancs, le jeton n étant noir). Soit maintenant une méthode de blanchiment. L'ordre des opérations ne compte pas : on peut donc partir du dernier jeton, remonter jusqu'au premier, et neutraliser les doublons. Cela coïncide avec la méthode proposée, qui est minimale.

5. *a.* On utilise le mode opératoire précédent : chaque jeton noir rencontré, en partant du jeton n, est blanchi ou laissé blanc s'il l'était déjà, en laissant intacts ceux du dessous : c'est bien cela l'important. Cette méthode blanchit tout.

b. Dans le plateau ci-contre, le pion noir circule au fur et à mesure des opérations et rejoint sa place initiale. Le tableau de 4 cases ne peut pas être blanchi.



6. Jeu à deux dimensions

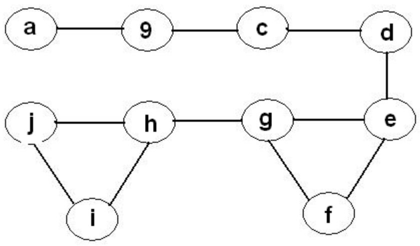
On peut appliquer la méthode de la question **4.** colonne par colonne, en commençant par la colonne $n.$ Cela garantit le blanchiment de la colonne $n.$ On passe ensuite au dernier jeton de la colonne $n-1$ et on remonte la colonne, etc. On passe ainsi par toutes les cases, qui peuvent donc être toutes blanchies.

7. Trois dimensions

Le jeu a la forme d'un cube. Les pions sont numérotés par des triplets (i, j, k) où i est le numéro de la *couche*, j le numéro de la *tranche* (compté de gauche à droite), k le numéro du *rang* (compté de l'arrière vers l'avant). En changeant de couleur le pion (i, j, k), on change la couleur de tous les pions dont la couche, la tranche et le rang ont des numéros inférieurs ou égaux respectivement à i, j, k.

Exercice académique 1 (Série S) – Exercice académique 1 (Séries STI2D/STL/STD2A) :

On introduit des noms pour les nœuds des graphes, que nous allons au fur et à mesure remplacer par les chiffres de 0 à 8.



On a

a → 9	d → c+e	h → g+i+j
9 → a+c	e → d+f+g	i → h+j
c → 9+d	f → e+g	j → h+i
	g → e+f+h	

Or 9→9 et 9→ a+c donc a+c=9 et alors **c=9-a**

De plus, c→9+d avec 0≤d≤8 ; donc c→9 ou 10 car on ne peut pas atteindre les 18 ! Alors **d=0 ou 1.**

Si **d=1** , c→10 donc c=0,2 ou 5 et d=1→9=c+e. d'où c=9-e=9-a donc a=e IMPOSSIBLE.

Donc **d=0.**

Alors c→9 donc **c=1, 3, 6, 7 ou 8.**

Comme d=0 et 0→10, **c+e=10** et **c+a=9** donc e-a=1 et **e=a+1**.

Alors pour le triplet (a,c,e) on a comme possibilités :

(1,8,2)

(2,7,3) Impossible car 2→10 et a→9 donc a≠2

(3,6,4)

(4,5,5) Impossible car c=e

(5,4,6) Impossible car a→9 et 5→10 donc a≠5

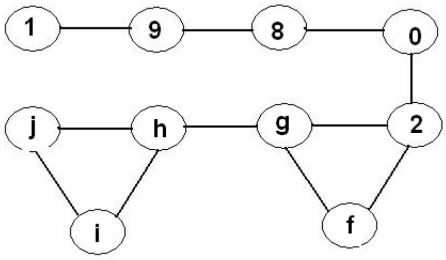
(6,3,7)

Et (7,2,8) Impossible car c→9 et 2→10 donc c≠2

Il ne reste que 3 possibilités.

Testons le triplet (1,8,2) :

On a :



C’est h qui a le plus de voisins, c’est donc lui le seul susceptible d’être associé à 18, donc **<u>h=4</u>**.

Alors g→2+4+f=6+f et cette somme vaut 9 ou 10. Pour faire 10 il manque 4 qui est déjà utilisé donc **<u>f=3</u>**.

Alors g→9 et il ne reste que **<u>g=6 ou 7</u>**.

Si g=6, alors h=4→g+i+j=6+i+j=18 donc i+j=12 donc j=12-i et alors i=5 et j=7 , ou i=7 et j=5 ou i=6 et j=6. Or i≠j .

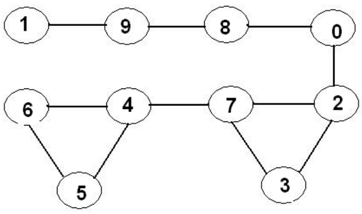
Si i=5 et j=7, i=5→h+j=4+7=11 impossible.

Si i=7 et j=5, i=7→h+j=4+5=9 et j=5→i+h=7+4=11 impossible.

On obtient donc **<u>g=7</u>**.

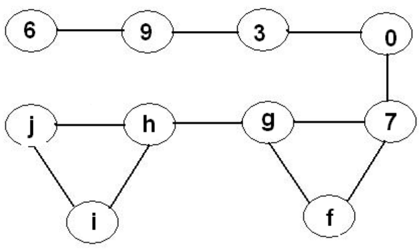
Alors h=4→i+j+g=7+i+j=18 donc i+j=11 et alors **<u>i=5</u>** et **<u>j=6</u>** ou l’inverse. Les deux conviennent.

On a finalement :



Testons le triplet (3,6,4) : 4 n’a que deux voisins dans ce cas, et il est impossible de faire 18 avec 1,2,5,7 et 8.

Testons le triplet (6,3,7) :



On a 7→g+f=9 donc (f,g)=(1,8) ou (4,5).

Si f=1, 1→9 et f=1→g+7=8+7=15 impossible

Si f=8, 8→9 et f=8→g+7=1+7=8 impossible

Si f=5, 5→10 et f=5→g+7=4+7=11 impossible

Si f=4, 4→18 et f=4→g+7=5+7=12 impossible

Donc le triplet (6 ,3,7) est impossible.

Exercice académique 2 (Série S) :

1) On développe $(x+y+z)(x+y+z)$.
2) Soit x, y, z les longueurs des arêtes du parallélépipède rectangle.
   On a $2(xy+xz+yz)=22$ et $4(x+y+z)=24$.
   La longueur d'une de ses diagonales est $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
   soit $\sqrt{(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)}=\sqrt{6^2-22}=\sqrt{14}$ cm   d'après l'égalité du 1).

Exercice académique 1 (Séries ES/L/STMG/ST2S) :

Exemple de représentation attendue des issues possibles

Nbre de doigts présentés	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	7
3	3	4	5	6	7	8
4	4	5	6	7	8	9
5	5	6	7	8	9	10

Exercice académique 2 (Séries ES/L/STMG/ST2S)- Exercice académique 2 (Séries STI2D/STL/STD2A) :

Soit x le côté (en cm) du carré situé en bas à gauche du rectangle.
On écrit dans chaque carré la longueur de son côté en fonction de x.

$x + 20 + x + 36 = x + x - 4 + 2x - 12$
$2x + 56 = 4x - 16$
$2x = 72$
$x = 36$

Ainsi AB = $x + x + 4 + x + 20 = 132$ cm et AD = $x + 20 + x + 36 = 128$ cm