

# OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2011

Vendredi 1<sup>er</sup> Avril 2011 (9h – 11h)

**SUJET QUATRIEME**

Les calculatrices seront autorisées ainsi que le matériel usuel de géométrie.  
Le recours à l'usage des ordinateurs est interdit.

Lors de la correction toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte, une justification étant attendue pour toute réponse proposée.

**Vous penserez par ailleurs à indiquer sur vos copies :**

NOM, Prénom

Classe

Etablissement (le cachet de l'établissement sera apposé sur chaque copie)

## Exercice 1

Pierre est un passionné des nombres. Il a dans sa voiture une horloge digitale à quatre chiffres qui indique l'heure de 00 : 00 à 23 : 59.

Au moment de partir pour un long déplacement, Pierre observe son horloge et constate que les deux nombres indiqués, celui des minutes et celui des heures, sont des carrés de nombres entiers (qui, sur une horloge digitale, s'écrivent sous la forme : 00, 01, 04, 09, 16, 25,...)

Au retour de son voyage, Pierre constate que son horloge affiche de nouveau des carrés de deux nombres entiers. Son ordinateur de bord lui indique qu'il a parcouru 352 km en 4 heures et 20 minutes. Quand Pierre peut-il être rentré de son voyage ?

## Exercice 2

On dispose, pour clôturer un terrain rectangulaire, de sept barrières rectilignes de longueurs 11m, 10m, 9m, 7m, 4m, 3m et 2m. On se propose de rechercher les aires des terrains qu'il est possible d'entourer ainsi.

1. Sachant que toutes les barrières sont utilisées à chaque fois, calculer le périmètre des terrains possibles.
2. Compléter le schéma commencé par Adèle afin qu'il réponde au problème posé.



3. Marc prétend qu'il est impossible de trouver un terrain de largeur 7 m. A-t-il raison ?
4. Trouver toutes les aires des terrains qu'il est possible d'entourer.

### Exercice 3

On joue aux fléchettes sur une cible comportant trois zones : une à 5 points, une à 7 points et une à 11 points. On s'intéresse aux différents scores possibles, le nombre de fléchettes n'étant pas limité.

Par exemple 30 est un score possible puisque  $30 = 11+7+7+5$  ou  $30 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ .

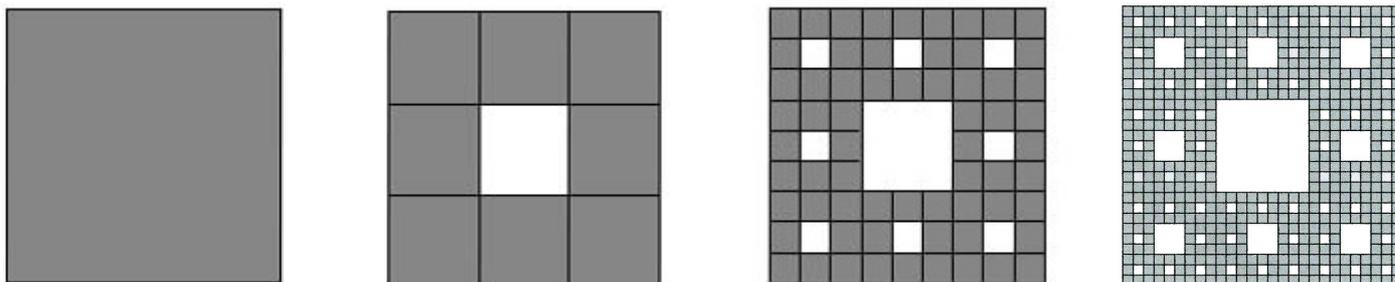
1. Vérifier que 26, 43, 220 012 sont des scores possibles.
2. On dit que deux jeux sont identiques si, pour chacun d'entre eux, chaque zone de la cible comporte le même nombre de fléchettes. Par exemple les jeux correspondant aux scores :  $7 + 5 + 5 + 11$  et  $5 + 7 + 11 + 5$  sont identiques.
  - a. Trouver quatre jeux différents donnant le score 40.
  - b. Démontrer qu'il existe deux jeux différents et deux seulement correspondant au score 34.
3. Trouver tous les scores que l'on peut obtenir avec un lancer de trois fléchettes ayant toutes atteint la cible. Présenter les résultats de manière organisée.
4. a. Démontrer que 14 et les quatre entiers suivants sont des scores possibles.  
 b. Déterminer la liste des entiers positifs non nuls qui ne correspondent à aucun score.

### Exercice 4

1. la carpe de Sierpinski

On considère un carré de côté 27.

A chaque étape, on enlève le carré central de chaque carré gris.



étape 0

étape 1

étape 2

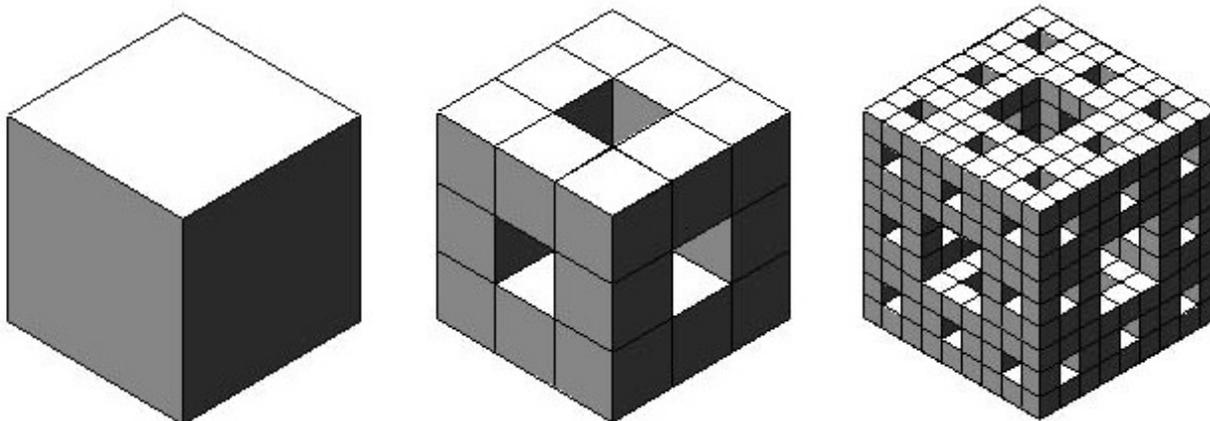
étape 3

A quelle étape l'aire de la carpe de Sierpinski devient-elle inférieure à la moitié de l'aire initiale ?

2. L'éponge de Sierpinski

On considère à présent un cube d'arête  $a$ .

A chaque étape, on évide chaque cube de sept petits cubes à l'intérieur comme ci-dessous.



étape 0

étape 1

étape 2

A quelle étape le volume de l'éponge devient-il inférieur à la moitié du volume initial ?