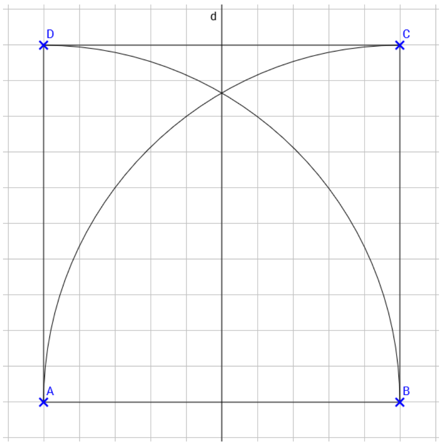
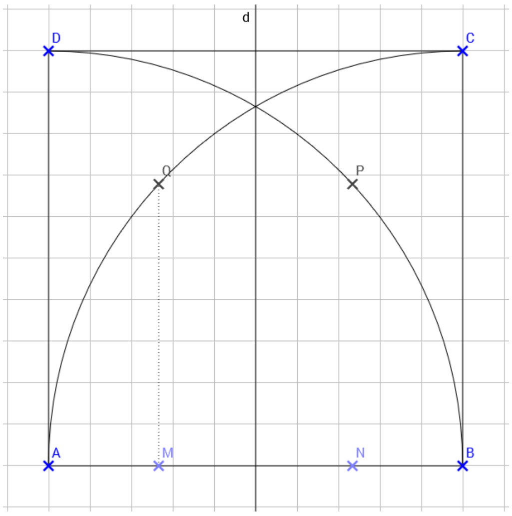
Eléments de solution du problème du mois de février/mars : *Sangaku*



Pour tout le problème, on se placera dans le repère orthonormé (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$).

On voit apparaître un axe de symétrie : la médiatrice du segment [AB] notée (d).



Soit M appartenant à [AB].

On note x = AM, $0 \leq x \leq 1$.

Soit Q appartenant à l'arc de cercle $\overset{\frown}{AC}$, de même abscisse que M.

On note N (respectivement P) le symétrique de M (respectivement P) par rapport à (d).

MNPQ est un rectangle.

MNPQ est un carré ssi MN = MQ.

Or MN = 1 – 2 x puisque AM = NB par symétrie.

Q (x_Q , y_Q) appartient au cercle de centre B (1 ; 0) de rayon 1. MQ = y_Q = $\sqrt{1-(x-1)^2}$ (M et Q ont même abscisse : x).

MN = MQ ssi 1 – 2 x = $\sqrt{1-(x-1)^2}$

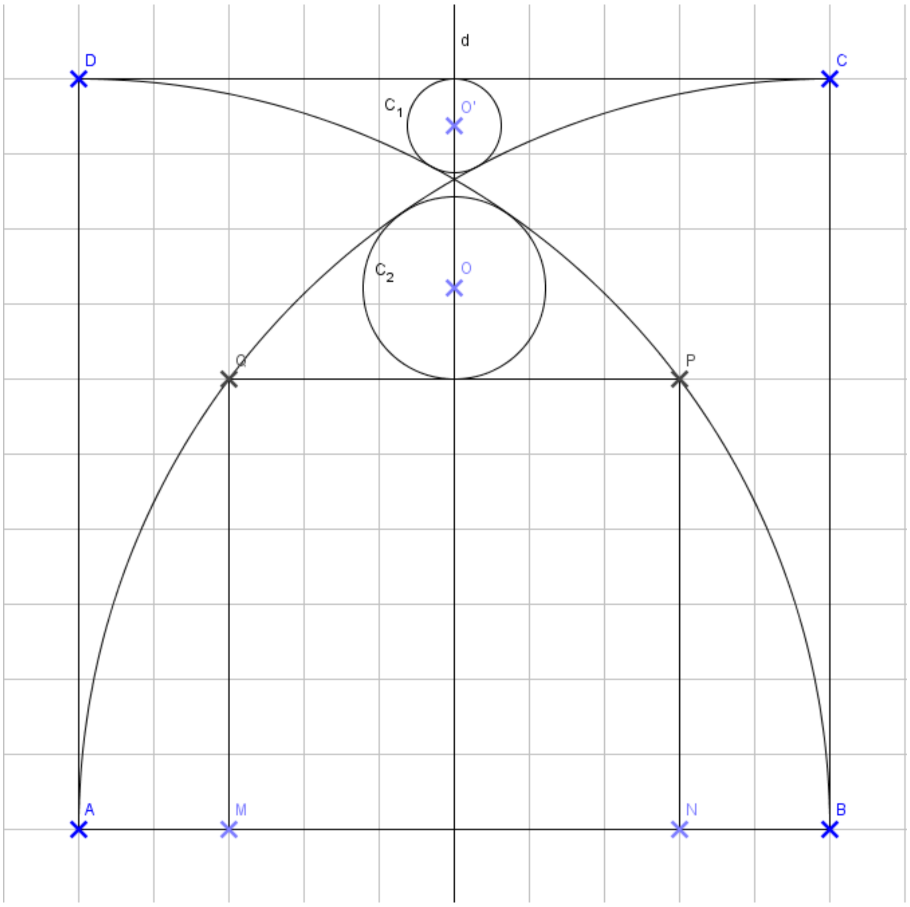
MN = MQ ssi $(1-2x)^2 = 1-(x-1)^2$

MN = MQ ssi 5 x^2 - 6 x + 1 = 0.

Les racines de 5 x^2 - 6 x + 1 sont 1 (entrainant M=B donc le carré obtenu est en fait ABCD, mais ce cas-là est à ignorer puisque nous n'aurions pas un carré de côté strictement plus petit mais deux carrés superposés) et $\frac{1}{5}$.

Si MNPQ est un carré (de côté supposé strictement inférieur à 1), alors $x = \frac{1}{5}$ et

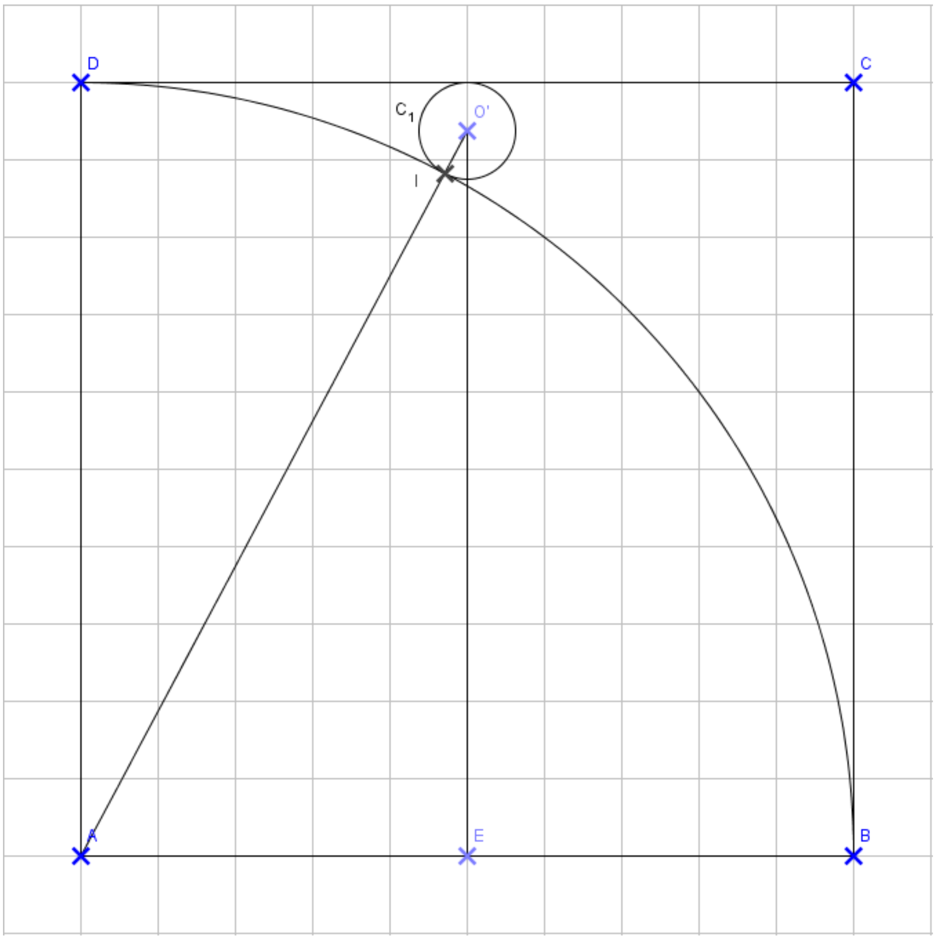
MN = 1 – 2 x = $\frac{3}{5}$. Dans la configuration où AM = $\frac{1}{5}$, le côté du carré vaut $\mathbf{\frac{3}{5}}$.



Notons (C_1) le cercle tangent à (DC) et aux arcs de cercle $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{DB}$. Notons O' son centre.

On note (C_2) le cercle tangent à (QP) et aux arcs de cercle $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{DB}$. Notons O son centre.

On cherche le rayon de ces deux cercles.

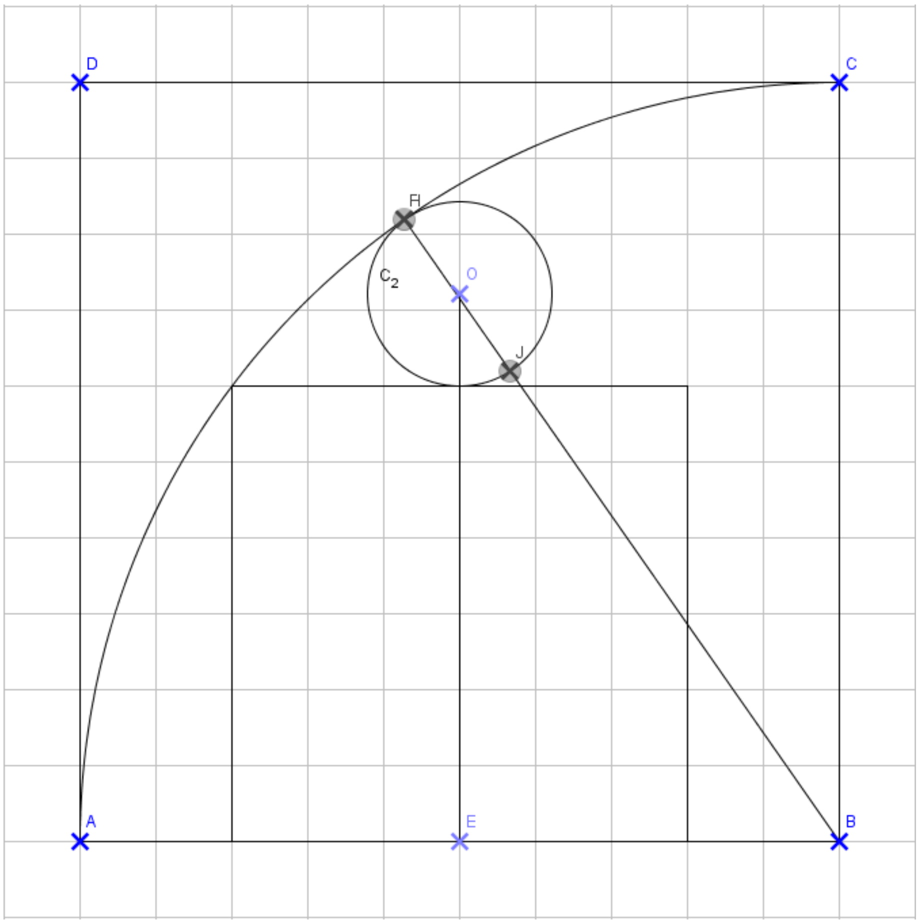


On note r le rayon de (C_1) et E le milieu de [AB]. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AEO' : $AO'^2 = AE^2 + EO'^2$.

Si deux cercles sont tangents en un point I, alors I et les centres des deux cercles sont alignés donc O', I et A sont alignés.

$(1+r)^2 = (\frac{1}{2})^2 + (1-r)^2$

$4r = \frac{1}{4}$ donc $r = \frac{1}{16}$.



On note R le rayon de (C_2). On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BEO :

$BO^2 = BE^2 + EO^2$.

Si deux cercles sont tangents en un point I, alors J et les centres des deux cercles sont alignés donc O, J et B sont alignés.

$(1-R)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(R+\frac{3}{5}\right)^2$

$\frac{16}{5} R = 1 - \frac{1}{4} - \frac{9}{25}$

D'où $R = \frac{39}{320}$.