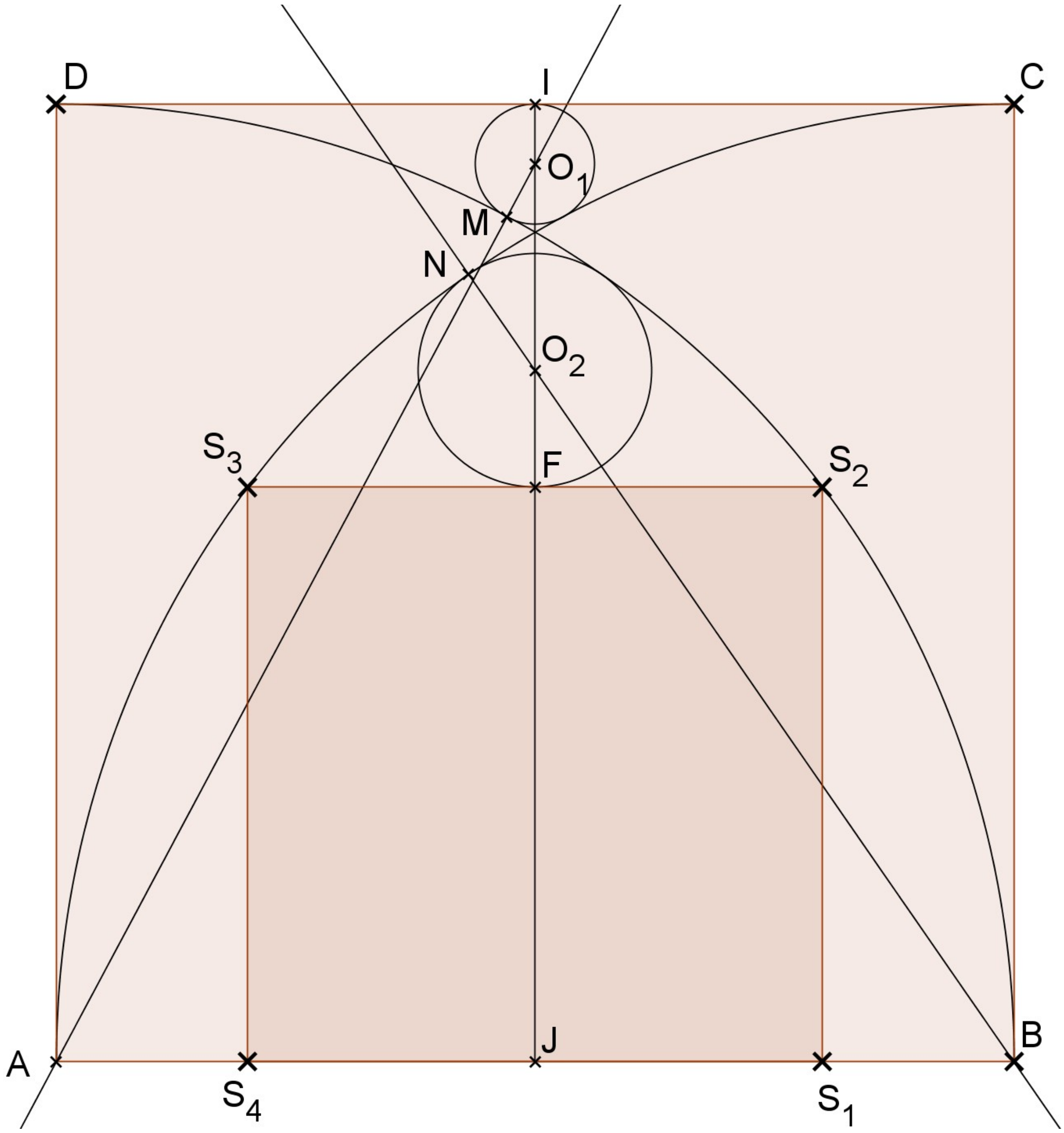
Problème lettre février-mars



(1) Par homothétie de centre A et de rapport a, on peut se ramener à la situation d'un carré ABCD de côté quelconque a. Dans la suite, je me contente donc du cas d'un carré de côté AB = 1 unité.

(2) Le problème est symétrique par rapport à la médiane (IJ) du carré ABCD. Les centres O_1 et O_2 des deux cercles sont donc sur cette médiane.

Côté du petit carré

En considérant l'angle $x=(\vec{AB}\,,\vec{AS}_2)$, on a $AS_1 = AS_4 = \cos x$ et donc $S_4S_1 = 2\cos x - 1$ d'une part et $S_1S_2 = \sin x$.

x est donc solution de l'équation $2\cos x - 1 = \sin x$ avec $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$

L'équation peut par exemple être résolue en se ramener à une équation du second degré complexe en posant $X=e^{ix}$: $(2i-1)X^2-2iX+1+2i=0$.

On obtient alors comme solutions $X=-i$ et $X=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$. La première solution est à écarter (x pas dans l'intervalle souhaité) et il reste donc $\cos x=\frac{4}{5}$ et $\sin x=\frac{3}{5}$

Le côté du petit carré est donc $\boxed{S_1 S_2=\sin x=\frac{3}{5}}$.

Rayon O_1I du petit cercle

Notons r_1 le rayon du petit cercle.

Le cercle est tangent au quart de cercle de centre A passant par les sommets B et D du grand carré. Par conséquent, en nommant M le point d'intersection de (AO_1) et de ce quart de cercle, M est le point de tangence entre le petit cercle et le quart de cercle : $AO_1=1+r_1$

En travaillant dans le repère $(I, \vec{AB}, \vec{AD})$, nous avons les coordonnées suivantes pour les points A et O_1 : A (-0,5 ; -1) et O_1 (0 ; $-r_1$).

Par suite $AO_1^2=(1+r_1)^2=0{,}25+(1-r_1)^2$ ce qui nous donne : $\boxed{r_1=\frac{1}{16}}$.

Rayon O_2N du « grand cercle »

Notons r_2 le rayon du grand cercle.

B, O_2 et N sont alignés ; N est le point de tangence entre le grand cercle et le quart de cercle de centre B passant par A et C : $BO_2=1-r_2$

En travaillant dans le repère $(F, \vec{AB}, \vec{AD})$, nous avons les coordonnées suivantes pour les points B et O2 : B (0,5 ; -0,6) et O_2 (0 ; r_2).

Par suite $BO_2^2=(1-r_2)^2=0{,}25+(0{,}6+r_2)^2$ ce qui nous donne : $\boxed{r_2=\frac{39}{160}}$.